Санкт-Петербургский государственный университет

Физический факультет

доц. Л. И. Виноградов

СТАТИСТИКА В ЯДЕРНОЙ ФИЗИКЕ.

ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗ О ЗАКОНЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Методические материалы к дистанционной лабораторной работе

Санкт-Петербург, 2008

Оглавление

Введение

Любая задача, решаемая экспериментальными методами, так или иначе, сводится к измерению определенных величин: числа срабатываний детектора за определенное время, амплитуд импульсов, интервалов времени между сигналами. Случайный характер процессов, исследуемых в ядерной физике, а также случайный характер во взаимодействиях излучений с детектором (т.е. с измерительным прибором), являются источниками принципиально неустранимых погрешностей измерений. Момент распада радиоактивного ядра и, следовательно, момент срабатывания детектора, количество частиц в заданном интервале времени, образованные заряженной частицей неравновесные заряды в рабочем объеме детектора подвержены статистическим флуктуациям, т.е. являются принципиально непредсказуемыми. Поэтому для получения достоверных результатов необходимо проводить регистрацию большого количества однотипных событий или, как говорят, «набирать статистику». Относительная погрешность измерения, а именно она определяет точность измерения, тем меньше, чем больше статистика набранных данных, т.е. чем больше число зарегистрированных событий. Затем путем построения статистического распределения измеряемой величины, выдвигаются гипотезы (предположения) о виде распределения, о равенстве выборочного среднего гипотетическому среднему и т.д. Основную выдвинутую и проверяемую гипотезу называют нулевой H_0. Конкурирующей или альтернативной гипотезой называют гипотезу, которая противоречит основной, обозначим ее H_1. Проверка гипотезы осуществляется с помощью некоторого критерия (правила, рецепта). Одним из таких критериев является критерии Пирсона или χ^2, с помощью которого будут проверяться гипотезы о виде распределения случайной величины в настоящей работе. Результат проверки может быть отрицательным (т.е. данные противоречат гипотезе) и, следовательно, от гипотезы необходимо отказаться, либо неотрицательным (т.е. данные не противоречат высказанной гипотезе) и, следовательно, ее можно принять в качестве одной из возможных. Важно понимать, что эксперимент лишь позволяет сделать вывод о непротиворечивости гипотезы и экспериментальных данных, но не доказывает правильность гипотезы. Далее, при проверке гипотезы могут быть совершены ошибки. Если в результате проверки будет отвергнута правильная гипотеза, когда она в действительности верна, это ошибка первого рода. Вероятность совершить ошибку первого рода называют **уровнем значимости** и обозначают α. Ошибка второго рода совершается тогда, когда принимается гипотеза, которая неверна, а на самом деле справедлива конкурирующая гипотеза. Вероятность совершить ошибку второго рода обозначают β. Вероятность не совершить ошибку второго рода (1 – β) называется **мощностью критерия** относительно альтернативной гипотезы.

Реальные распределения, измеренные на опыте, зачастую хорошо воспроизводятся с помощью биноминального распределения, распределений Пуассона или Гаусса. По этой причине эти распределения широко используются и, без всякого преувеличения, могут считаться фундаментальными. Дадим некоторые сведения об этих распределениях.

1. Статистические распределения

1.1. Фундаментальные распределения и их связь

При измерениях в ядерной физике и физике частиц мы имеем дело с потоками событий, например, попаданиями частиц или квантов в рабочий объём детектора. Под потоком будем понимать последовательность событий, происходящих в какие-то моменты времени. Поток можно изобразить в виде последовательности точек на оси времени. Если поток событий **стационарен**, **не имеет последействия** и **ординарен**, то он называется стационарным потоком Пуассона.

Стационарность: вероятность попадания события в интервал Δt не зависит от расположения интервала Δt на оси времени.

Без последействия: если последовательные интервалы Δt_1 и Δt_2 не перекрываются, то число событий в Δt_2 не зависит от числа событий в интервале Δt_1.

Ординарность: вероятность попадания в элементарный интервал Δt двух или более событий пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью попадания одного события, т.е. частицы, в основном, попадают в детектор поодиночке.

Если предположить, что эти условия выполняются, то число частиц n, попадающих в любой фиксированный интервал Δt, будет близко к теоретическому распределению Пуассона:

$$P(n,\Delta t) = \frac{(n_0 \Delta t)^n}{n!} \exp(-n_0 \Delta t), \qquad (1.1)$$

n_0 — интенсивность потока. Математическое ожидание или среднее число частиц в интервале Δt: $\langle n \rangle = n_0 \Delta t$.

Важно! Здесь и дальше по тексту для любого теоретического распределения будем использовать угловые скобки «бра» и «кэт» $\langle\rangle$

(как в квантовой механике!) для обозначения усреднения по всем возможным значениям случайной величины *n*. Это так называемое усреднение по генеральной совокупности (трудно выполнимое на практике!). На опыте в качестве оценки теоретического среднего $\tilde{n}$ (*n* тильда), как правило, берется выборочное среднее, которое будем обозначать чертой над случайной величиной, например $\bar{n}$. Результат определения любой величины должен быть записан в виде: $\langle n \rangle = \tilde{n} \pm \sigma_{\tilde{n}}$, где $\sigma_{\tilde{n}}$ погрешность оценки. Такая запись означает, что истинное значение $\langle n \rangle$ лежит в интервале $\pm\sigma_{\tilde{n}}$ с вероятностью *p*. Эта вероятность задается достаточно произвольно и называется доверительной вероятностью, а интервал $\pm\sigma_{\tilde{n}}$ называется доверительным интервалом.

При использовании среднего $\langle n \rangle$, уравнение (1.1) принимает следующий вид:

$$P(n, \langle n \rangle) = \frac{\langle n \rangle^n}{n!} \exp(-\langle n \rangle). \tag{1.2}$$

Средняя величина $\langle n \rangle$, в отличие от целой переменной n, может быть и дробной! Как следует из курсов по статистике, для распределения Пуассона дисперсия случайной величины n, $D(n) = \langle (n - \langle n \rangle)^2 \rangle = \langle n \rangle$, а стандартное отклонение $\sigma = \sqrt{D(n)} = \sqrt{\langle n \rangle}$.

При увеличении $\langle n \rangle$ распределение Пуассона (1.2) переходит в нормальное или Гауссово распределение с одним параметром $\langle n \rangle$:

$$P(n, \langle n \rangle) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \langle n \rangle}} \exp(-(n - \langle n \rangle)^2 / 2\langle n \rangle). \tag{1.3}$$

Качественно переход от Пуассоновского распределения к Гауссову распределению можно наблюдать на рис. 1, на котором приведены распределения, рассчитанные по формуле (1.2), для четырёх значений $\langle n \rangle$= 2, 5, 10, 20. При $\langle n \rangle$= 20 распределение практически не отличается от распределения Гаусса, рассчитанного по формуле (1.3).

Известно (см. [1], [2] и [4]), что распределение Пуассона является предельным случаем биноминального распределения.

Интересуемся вероятностью благоприятных исходов *m* в *n* опытах. Классический пример (ставший уже банальным) это бросание монеты. Какова вероятность выпадения *m* орлов в *n* бросаниях, если

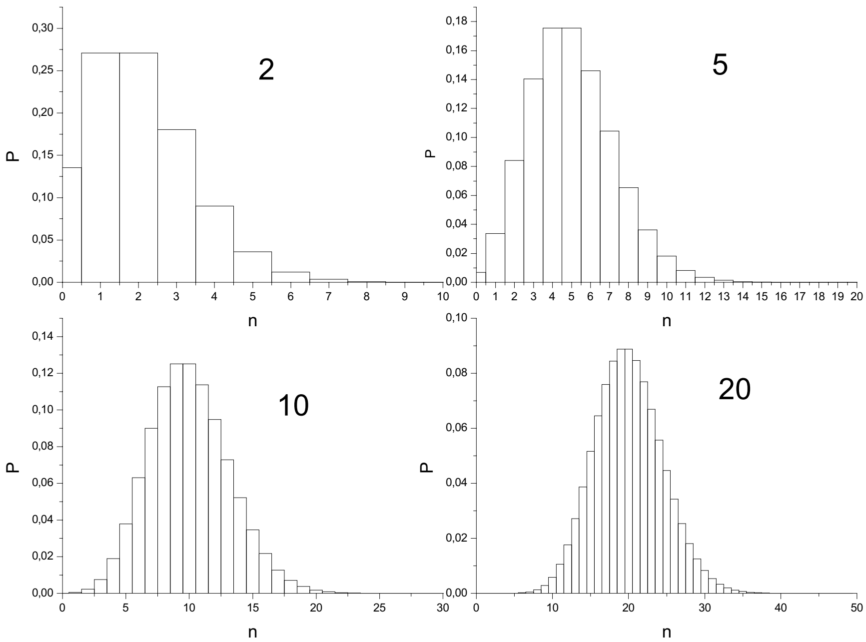


Рис. 1. Трансформация вида распределения Пуассона при варьировании параметра $\langle n \rangle$: $\langle n \rangle$ = 2, 5, 10 и 20.

вероятность выпадения орла p? Эта вероятность дается биноминальным распределением:

$$P(m;p,n) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m},$$
$$\text{где} \quad C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} \quad \text{– число сочетаний из } m \text{ по } n. \tag{1.4}$$

Для биноминального распределения математическое ожидание или среднее благоприятных исходов $\langle m \rangle$ равно произведению np, дисперсия $D(m) = np(1-p)$, стандартное отклонение $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$.

Если одновременно устремлять число опытов $n \to \infty$, а вероятность появления благоприятного события в каждом опыте p к 0 при постоянном произведении $np = a$, биноминальное распределение переходит в распределение Пуассона, а когда $a \to \infty$ распределение Пуассона переходит в Гауссово распределение (см. рис. 1).

Приведем пример использования биноминального закона из области физики высоких энергий. Предположим, имеем в распоряжении счетчики мюонов космических лучей, которые обладают 95% эффективностью. Для идентификации мюона необходимо, как минимум, три точки на треке в магнитном поле. Сколько счетчиков надо поставить в телескоп для регистрации мюона с 99,9% вероятностью? Возьмем для начала три счетчика: вероятность того, что все три счетчика сработают, будет равна: $P(3;\ 0,95,\ 3) = 0,95 \times 0,95 \times 0,95 = 0,857$.

Добавим четвертый: $P(3; 0,95, 4) + P(4; 0,95, 4) = 0,171 + 0,815 = 0,986$. Уже лучше! Добавим пятый детектор: $P(3; 0,95, 5) + P(4; 0,95, 5) +$ $+P(5; 0,95, 5) = 0,021 + 0,204 + 0,774 = 0,999$. Что и требовалось получить!

Для случайной непрерывной величины x, подчиняющейся нормальному распределению (синоним Гауссова распределения), выполняются следующие равенства для вероятностей:

$$P(|x - \langle x\rangle| \le \sigma) = \int_{\bar{x}-\sigma}^{\bar{x}+\sigma} P(x, \langle x\rangle)dx \approx 0,683, \qquad (1.5)$$

$$P(|x - \langle x\rangle| \le 2\sigma) = \int_{\bar{x}-2\sigma}^{\bar{x}+2\sigma} P(x, \langle x\rangle)dx \approx 0,954, \qquad (1.6)$$

$$P(|x - \langle x\rangle| \le 3\sigma) = \int_{\bar{x}-3\sigma}^{\bar{x}+3\sigma} P(x, \langle x\rangle)dx \approx 0,997. \qquad (1.7)$$

Нарисуем нормированное на единицу в максимуме Гауссово распределение и покажем характерные точки.

Параметр Δ или, как иногда обозначают, $\Delta^{1/2}$ есть **П**олная **Ш**ирина гауссиана на **П**оловине **В**ысоты (ПШПВ). Такое сокращение также применяется при описании линий спектра, имеющих форму близкую к гауссовой. Можно показать, что $\Delta \approx 2,35\sigma$, где σ — параметр нормального распределения, на рисунке это отрезок на высоте

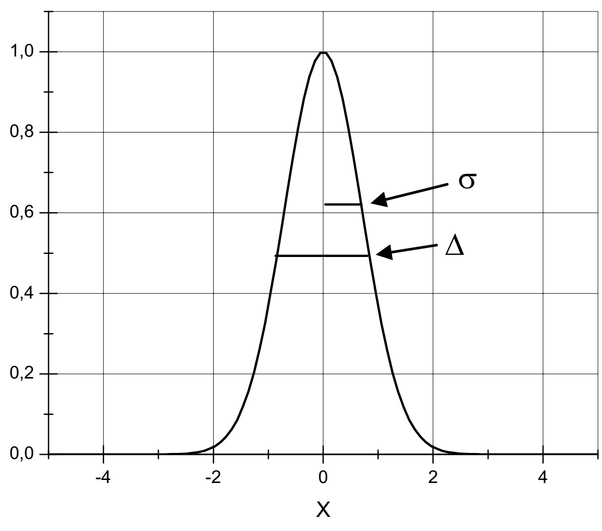


Рис. 2. Нормированное на единицу в максимуме распределение Гаусса со средним значением случайной величины x равным нулю.

приблизительно 0,61. Относительная ширина Гауссова распределения, взятая на половине высоты определяется следующим выражением $\Delta/\langle n\rangle = 2{,}35\sigma/\langle n\rangle = 2{,}35\sqrt{\langle n\rangle}/\langle n\rangle = 2{,}35/\sqrt{\langle n\rangle}$, т.е. уменьшается при возрастании $\langle n\rangle$. Распределение становится у́же, т.е. относительные отклонения измеренных значений от среднего становятся все меньше и меньше с ростом $\langle n\rangle$.

Рассмотрим типичную практическую задачу. Однократно зарегистрировали детектором (полагаем, что просчётов нет!) $n_э$ событий, $n_э >> 1$, например 100. Какова погрешность однократного измерения? Статистика радиоактивного распада описывается распределением Пуассона, которое, как уже демонстрировалось выше, при $\overline{n} \geq 20$ практически совпадает с нормальным распределением. При этом дисперсия равняется среднему случайной величины $D(n) = \langle (n - \langle n\rangle)^2 \rangle = \langle n\rangle$, а $\sigma = \sqrt{D(n)} = \sqrt{\langle n\rangle}$. Тогда в качестве оценки среднего можно взять $n_э$, а за абсолютную ошибку $\sqrt{n_э}$. Относительной ошибкой будет $\dfrac{\sqrt{n_э}}{n_э} = \dfrac{1}{\sqrt{n_э}}$. Результат для среднего $\langle n\rangle$ можно записать: $\langle n\rangle = n_э \pm \sqrt{n_э}$ с доверительной вероятностью 68,3% и относительной ошибкой $\dfrac{1}{\sqrt{n_э}} \times 100\% = 10\%$.

1.2. Распределение временных интервалов для Пуассоновского потока

Рассмотрим Пуассоновский поток событий, например, испускание частиц радиоактивным источником. Какова вероятность, что между событиями будет интервал времени t? Так как интервал — непрерывная случайная величина, то для него нельзя построить ряд распределений наподобие Пуассоновского распределения. Нельзя приписать каждому значению непрерывной случайной величины отличную от нуля вероятность, так как суммирование вероятностей по несчётному множеству значений случайной величины дало бы вероятность равную бесконечности. В этом состоит так называемый парадокс «нулевой вероятности». Данная задача должна быть сформулирована иначе: если в какой-то момент времени произошло событие, пусть это будет при $t = 0$, то какова вероятность того, что следующее событие произойдет **в интервале от *t* до *t* + *dt***, а в промежутке (0, t) событий не будет?

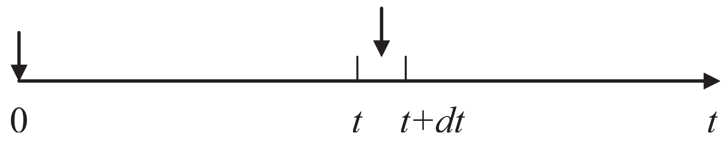


Рис.3. Иллюстрация к выводу функции плотности вероятности для потока Пуассона.

Искомая вероятность будет равна

$$W = P(0,t)P(1,dt) = \exp(-n_0 t) n_0 dt = n_0 \exp(-n_0 t) dt = f(t) dt . \quad (1.8)$$

Первый сомножитель это вероятность того, что в интервале (0, t) событий не будет и эта вероятность рассчитывается по закону Пуассона (1.1): $P(0,t) = \exp(-n_0 t)$.

Второй сомножитель это вероятность того, что событие произойдет в интервале dt: $n_0 dt$. В результате получаем (1.8), где

$$f(t) = n_0 \exp(-n_0 t), \quad (1.9)$$

есть функция плотности вероятности событий для потока Пуассона или функция распределения временных интервалов в нашем случае. Приведем график этой функции.

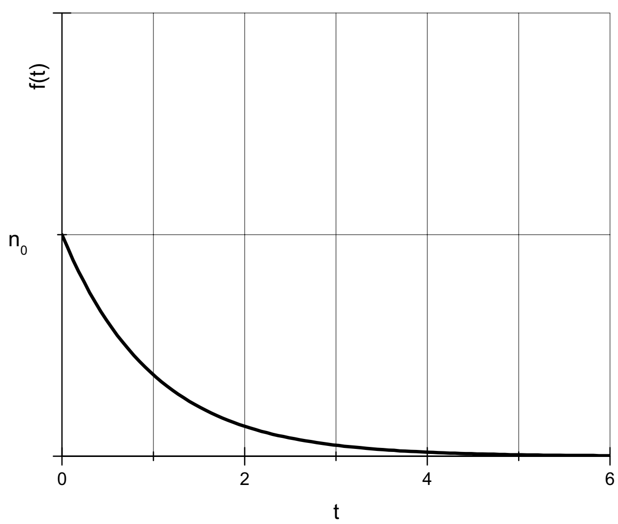


Рис. 4. Функция распределения временных интервалов для потока Пуассона.

Из вида этой функции следует: наибольшую вероятность имеют малые интервалы, функция максимальна при $t = 0$. Это означает, что при регистрации частиц из Пуассоновского потока реальным счетчиком с конечным временем регистрации одного события τ, всегда будут просчеты, так как в интервал τ может попасть не одна частица, а несколько, но они будут сосчитаны как одно событие. Т.е. случайный характер событий **принципиально** приводит к просчетам. Очевидно, что средний интервал между событиями равен $\langle t \rangle = 1/n_0$.

1.3. Распределение χ^2 (хи-квадрат)

Другим важным теоретическим распределением, которое широко используется на практике, является распределение χ^2. Под случайной величиной χ^2 понимается сумма квадратов случайных величин z_i распределенных по нормальному закону и с дисперсией равной единице:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} z_i^2 . \tag{1.10}$$

Аналитическое выражение для плотности вероятности распределения χ^2 имеет следующий вид:

$$P(\chi^2;\nu) = \frac{2^{\frac{\nu}{2}}}{\left(\frac{\nu}{2}-1\right)!}\chi^{\nu-2}e^{\frac{\chi^2}{2}} . \tag{1.11}$$

Случайная величина χ^2 может принимать значение от 0 до ∞. Параметр распределения ν называется числом степеней свободы. Если слагаемые в сумме 1.10 независимы (слагаемых k штук, то $\nu = k-1$). Минус единица появляется из-за объединения случайных величин в сумму. Если между слагаемыми существует t связей, то число степеней свободы уменьшается на t: $\nu = k-1-t$. Среднее значение случайной величины χ^2 равняется числу степеней свободы $<\chi^2> = \nu$, а дисперсия равна $D(\chi^2) = 2\nu$. На рис. 5 показаны распределения $P(\chi^2;\nu)$ для нескольких значений параметра степеней свободы.

Для применения на практике важное значение играет т.н. накопленная вероятность. Поясним это понятие. Зададимся следующим вопросом: какова вероятность нахождения χ^2 в интервале $(0, \chi_*^2)$, где

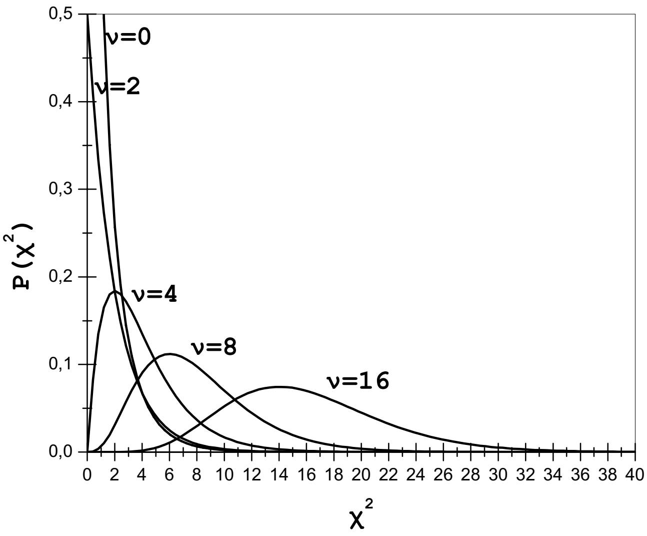


Рис. 5. Распределение χ^2 для степеней свободы $\nu = 0, 2, 4, 8$ и 16.

χ_*^2 произвольная точка на оси χ^2 в интервале (0, ∞)? Ответом на этот вопрос будет значение следующего интеграла:

$$F(\chi^2 < \chi_*^2; \nu) = \int_0^{\chi_*^2} P(\chi^{2\prime}) d\chi^{2\prime} . \tag{1.12}$$

Вероятность того, что χ^2 будет больше некоторого значения χ_*^2, дается следующим интегралом:

$$F(\chi^2 > \chi_*^2; \nu) = \int_{\chi_*^2}^{\infty} P(\chi^{2\prime}) d\chi^{2\prime} . \tag{1.13}$$

Очевидно, что сумма этих интегралов равна единице.

В приложении на с. 17 к данной работе приводится табл. 3 значений интегралов (1.13) для числа степеней свободы ν от 1 до 30. Числом ν занумерованы строки таблицы. В самой верхней строке приведены вероятности $F(\chi^2 > \chi_*^2; \nu)$ шагом в 0,05 (5%). Значения χ_*^2 — это основной массив чисел этой таблицы. Поясним смысл этой таблицы. Рассмотрим распределение с 12 степенями свободы ν. Берем 12-ую строку. Зададимся вероятностью $F(\chi^2 > \chi_*^2; 12) = 0{,}05$, это значение определяет столбец. На пересечении строки и столбца находим $\chi_*^2 = 21{,}026$. Это значит, что вероятность того, что случайная величина $\chi^2 > 21{,}026$ равна 0,05 (5%) и соответственно вероятность того, что $\chi^2 < 21{,}026$ равна 0,95 (95%), т.е. лежит в интервале от 0 до 21,026.

Отсюда следует рецепт проверки непротиворечивости гипотезы и экспериментальных данных. На основании гипотезы и экспериментальных данных строим случайную величину, которая хотя бы приблизительно распределена по закону χ^2. Задаемся уровнем значимости, например 0,05 (5%), и определяем число степеней свободы. Используя эти данные, из таблицы находим величину χ^2_*. Смотрим, попадает ли вычисленная величина в интервал $(0, \chi^2_*)$. Если не попадает, то делаем вывод либо о противоречивости гипотезы и экспериментальных данных, либо о том, что реализовалось редкое событие. Если попадает, то говорим о непротиворечивости гипотезы и эксперимента с уровнем значимости α = 0,05.

2. Пример проверки гипотезы о законе распределения случайной величины

Предположим, что проведено $n = 200$ измерений случайной величины, например, 200 раз запускался счетчик импульсов с детектора на определенный интервал времени. В табл. 1 в первой строке приведены значения количества отсчетов k за данный интервал времени, во второй приведены частоты их появления n_k. О третьей строке таблицы будет сказано ниже.

Таблица 1

Данные по экспериментальным и ожидаемым частотам по Пуассону

k	0	1	2	3	4	5	6	Сумма
n_k	109	65	22	3	1	0	0	200
$m_k = np_k$	108,7	66,3	20,2	4,1	0,6	0,07	0,01	200

Выдвигаем гипотезу о том, что эта выборка принадлежит генеральной совокупности распределенной по закону Пуассона. Будем использовать критерий χ^2 для проверки этой гипотезы. Суть метода сводится к сравнению экспериментальных частот появления событий с частотами, вычисленными исходя из гипотезы о виде распределения случайной величины k. Введём обозначение для $m_k = np_k$ для ожидаемых частот появления отсчетов с данным k (можно сказать о k-ом интервале). Эти частоты вычислим исходя из предполагаемого Пуассоновского распределения (это наша гипотеза).

В настоящем параграфе введём новые обозначения и перепишем распределение Пуассона таким образом:

$$p_k = P(k, \langle k \rangle) = \frac{\langle k \rangle^k}{k!} \exp(-\langle k \rangle). \tag{2.1}$$

В качестве оценки среднего по генеральной совокупности $< k >$ возьмём выборочное среднее

$$\overline{k} = \sum_k k n_k \Big/ \sum_k n_k \,. \tag{2.2}$$

Это ещё одна гипотеза, выдвинутая нами и которую следовало бы проверить, например, используя критерий Стьюдента, но это работа для мотивированных читателей.

Получим $\overline{k}$ = (0×109+1×65+2×22+3×3+4×1)/200=0,61. Подставим это значение в (2.1) вместо $\langle k \rangle$ и вычислим ожидаемые частоты m_k появления того или иного числа k. Эти частоты приведены в третьей строке табл. 1. Сравнивая вторую и третью строки таблицы, можно заключить, что экспериментальные и теоретические частоты находятся в разумном согласии. Однако нам требуется получить количественную оценку этого согласия.

В соответствии с рецептом, приведенным в конце предыдущего параграфа, надо построить величину, которая распределена приблизительно по χ^2. Составляем величину z_k, (см. формулу (1.10)):

$$z_k = \frac{n_k - np_k}{\sqrt{np_k}}. \tag{2.3}$$

Легко убедиться, что величины z_k для $k = 0,1,2$ примерно распределены по нормальному закону со средним равным нулю и дисперсией равной единице (помним, что $D(ax+b) = a^2 D(x)$, a, b — числа). Поскольку ожидаемые частоты для $k > 2$ малы, объединим последние четыре значения k и составим новую табл. 2.

Таблица 2

k	0	1	2	≥ 3
n_k	109	65	22	4
$m_k = np_k$	108,7	66,3	20,2	4,8

Сделаем здесь некоторые пояснения. Можно полагать, что каждая случайная величина n_k подчиняется биноминальному закону (отсчёт равен k или не равен, т.е. «бросаем монету»). Ранее указывалось, что биноминальное распределение быстро сходится к распределению Пуассона с математическим ожиданием и дисперсией $< n_k > = np_k$. В свою очередь, распределение Пуассона сходится к нормальному (Гауссову) распределению по мере возрастания $< n_k >$. Из рис. 1 можно заключить, что уже при $< n_k > = 5$ нормальное распределение хорошо аппроксимирует Пуассоновское распределение. Таким образом, можно считать, что при $np_k \geq 5$ величина n_k распределена по нормальному закону со средним и дисперсией np_k. Таким образом, можно считать, что при $np_k \geq 5$ величина n_k распределена по нормальному закону со средним и дисперсией np_k. Мы имеем право и должны выбирать любые интервалы Δk на оси случайной величины, лишь бы для этих интервалов приближенно выполнялось условие $np_{\Delta k} \geq 5$.

Используя данные табл. 2, составим сумму квадратов величин $z_{\Delta k}^2$

$$\sum_{\Delta k} z_{\Delta k}^2 = \sum_{\Delta k} \frac{\left(n_{\Delta k} - m_{\Delta k}\right)^2}{m_{\Delta k}}, \tag{2.4}$$

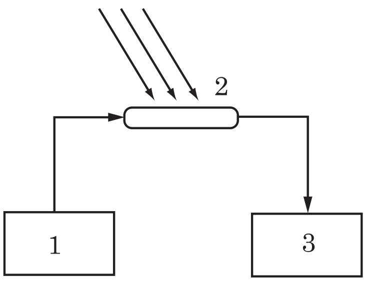
которая распределена приблизительно по закону χ^2 с плотностью вероятности, выражающейся формулой (1.11) и мы теперь можем применить критерий χ^2.

Вычислим сумму

$$u^2 = \sum_{\Delta k} \frac{\left(n_{\Delta k} - m_{\Delta k}\right)^2}{m_{\Delta k}} = \frac{0,3^2}{108,7} + \frac{(-1,3)^2}{66,3} + \frac{1,8^2}{20,2} + \frac{(-0,8)^2}{4,8} = 0,32.$$

Данная случайная величина должна быть распределена приблизительно по закону χ^2 с двумя степенями свободы. Такое число степеней свободы определяется тем, что исходно и при вычислении u^2 на случайные величины n_k были наложены связи: $\sum_k n_k = 200$ и $\sum_k k n_k = 122$ (см. (2.2)). Поэтому $\nu = 4 - 1 - 1 = 2$. Теперь из табл. 3 (см. с. 17), задавшись уровнем значимости, например, 0,05 (5%), находим, что при двух степенях свободы величина u^2 должна лежать в интервале (0, 5,991). Поскольку значение $u^2 = 0,32$ попадает в этот незначимый (!) интервал, гипотеза принимается и можно сделать вывод о том, что распределение отсчетов в данной выборке не противоречит гипотезе о том, что это Пуассоновское распределение. Термин «незначимый интервал» кажется абсурдным, так как вроде бы гипотеза подтверждается, а интервал незначимый. Незначимость означает отсутствие противоречия между гипотезой и данными. Если бы мы получили значение $u^2 > 6$, то в этом случае мы попали бы в значимый интервал. И это надо трактовать в том смысле, что либо получен маловероятный результат, который должен появляться не более чем в 5% выборок при данной гипотезе, либо должны сказать, что исходная гипотеза противоречит данной выборке.

3. Указания по выполнению работы



Блок-схема установки показана на рисунке. Установка состоит из источника высокого напряжения *1*, детектора излучения *2*, и счетного устройства *3*. Детектор регистрирует фоновое излучение. В качестве детектора используется сцинтилляционный кристалл.

В работе требуется провести измерения интенсивности фонового излучения с различными интервалами времени регистрации, получить данные, как в рассмотренном примере (см. табл. 1) и проверить, что полученные величины подчиняются закону Пуассона и(или) Гаусса.

Задание 1. Установить время измерений такое, чтобы в среднем регистрировалось от 1 до 3 импульсов. Произвести 1500-2500 измерений отсчетов счетчика.

Задание 2. Установить время измерений на пересчетном приборе такое, чтобы в среднем регистрировалось более 20 импульсов. Выполнить 1500-2500 измерений отсчетов счетчика.

Задание 3. По результатам измерений построить гистограммы распределения импульсов. С помощью критерия χ^2 проверить предположения о законах распределений. Указать статистическую значимость полученных оценок.

На графиках с экспериментальными гистограммами построить теоретические гистограммы. Экспериментальная и теоретическая гистограммы должны быть нормированы к полному числу измерений. По гистограмме задания 2 проверить, что выполняются формулы (1.5) — (1.7), например, что приблизительно 68% отсчетов не отличаются от среднего значения $\bar{k}$ больше, чем на $\pm\sqrt{\bar{k}}$.

В отчете представить блок-схему установки, результаты измерений в виде таблиц и гистограмм, выводы.

4. Контрольные вопросы

1. Принципиальная неизбежность погрешностей в измерениях.
2. Фундаментальные статистические распределения, их свойства и взаимосвязь.
3. Поток Пуассона, его свойства.
4. Что такое стандартное отклонение и дисперсия случайной величины.
5. Распределение χ^2, накопленная вероятность.
6. Методика проверки гипотез с помощью критерия χ^2.
7. Показать, что ширина Гауссиана на половине высоты приблизительно равна 2,35σ.
8. Сколько надо набрать событий в Пуассоновском потоке, чтобы обеспечить точность 3% при доверительной вероятности 95%.

5. Рекомендуемая литература

1. Д. Худсон. Статистика для физиков. Мир. Москва 1967.
2. В.И. Гольданский, А.В. Куценко, М.И. Подгорецкий. Статистика отсчётов при регистрации ядерных частиц. Москва. Физматгиз, 1959.
3. Лабораторный практикум по экспериментальным методам ядерной физики. Под ред. К. Г. Финогенова. Энергоатомиздат. Москва 1986.
4. R. J. Barlow. Statistics. A Giude to the Use of Statistical Methods in the Physical Sciences. J. Willey & Sons.

Таблица 3

Значения χ_*^2 для разных вероятностей $F(\chi^2 > \chi_*^2;\nu)$ в зависимости от числа степеней свободы ν

ν	0,99	0,98	0,95	0,9	0,8	0,7	0,5	0,3	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01	ν
1	0,000157	0,00628	0,00393	0,0158	0,0642	0,148	0,455	1,074	1,642	2,706	3,841	5,412	6,635	1
2	0,0201	0,0404	0,103	0,211	0,446	0,713	1,386	2,408	3,219	4,605	5,991	7,824	9,210	2
3	0,115	0,185	0,352	0,584	1,005	1,424	2,366	3,605	4,642	6,251	7,815	9,837	11,345	3
4	0,297	0,429	0,711	1,064	1,649	2,195	3,357	4,878	5,989	7,779	9,488	11,668	13,277	4
5	0,554	0,752	1,145	1,610	2,343	3,000	4,351	6,064	7,289	9,236	11,070	13,388	15,086	5
6	0,872	1,134	1,635	2,204	3,070	3,828	5,348	7,231	8,558	10,645	12,592	15,033	16,812	6
7	1,239	1,564	2,167	2,833	3,822	4,671	6,346	8,383	9,803	12,017	14,067	16,622	18,475	7
8	1,646	2,032	2,733	3,490	4,594	5,527	7,344	9,524	11,030	13,362	15,507	18,168	20,090	8
9	2,088	2,532	3,325	4,168	5,380	6,393	8,343	10,656	12,242	14,684	16,919	19,679	21,666	9
10	2,558	3,059	3,940	4,865	6,179	7,267	9,342	11,781	13,442	15,987	18,307	21,161	23,209	10
11	3,053	3,609	4,575	5,578	6,989	8,148	10,341	12,899	14,631	17,275	19,675	22,618	24,725	11
12	3,571	4,178	5,226	6,304	7,807	9,034	11,340	14,011	15,812	18,549	21,026	24,054	26,217	12
13	4,107	4,765	5,892	7,042	8,634	9,926	12,340	15,119	16,985	19,812	22,362	25,472	27,688	13
14	4,660	5,368	6,571	7,790	9,467	10,821	13,339	16,222	18,151	21,064	23,685	26,873	29,141	14
15	5,229	5,985	7,261	8,547	10,307	11,721	14,339	17,322	19,311	22,307	24,996	28,259	30,578	15
16	5,812	6,614	7,962	9,312	11,152	12,624	15,338	18,418	20,465	23,542	26,296	29,633	32,000	16
17	6,408	7,255	8,672	10,085	12,002	13,531	16,338	19,511	21,615	24,769	27,587	30,995	33,409	17
18	7,015	7,906	9,390	10,865	12,857	14,440	17,338	20,601	22,760	25,989	28,869	32,346	34,805	18
19	7,633	8,567	10,117	11,651	13,716	15,352	18,338	21,689	23,900	27,204	30,144	33,687	36,191	19
20	8,260	9,237	10,851	12,443	14,578	16,266	19,337	22,775	25,038	28,412	31,410	35,020	37,566	20
21	8,897	9,915	11,591	13,240	15,445	17,182	20,337	23,858	26,171	29,615	32,671	36,343	38,932	21
22	8,542	10,600	12,388	14,041	16,314	18,101	21,337	24,939	27,301	30,813	33,924	37,659	40,289	22
23	10,196	11,293	13,091	14,848	17,187	19,021	22,337	26,018	28,429	32,007	35,172	38,968	41,638	23
24	10,856	11,992	13,848	15,659	18,062	19,943	23,337	27,096	29,553	33,196	36,415	40,270	42,980	24
25	11,524	12,697	14,611	16,473	18,940	20,867	24,337	28,172	30,675	34,382	37,652	41,566	44,314	25
26	12,198	13,409	15,379	17,292	19,820	21,792	25,336	29,246	31,795	35,563	38,885	42,856	45,642	26
27	12,879	14,125	16,151	18,114	20,703	22,719	26,336	30,319	32,912	36,741	40,113	44,140	46,963	27
28	13,565	14,847	16,928	18,939	21,588	23,647	27,336	31,391	34,027	37,916	41,337	45,419	48,278	28
29	14,256	15,574	17,708	19,768	22,475	24,577	28,336	32,461	35,139	39,087	42,557	46,693	49,588	29
30	14,953	16,306	18,493	20,599	23,364	25,508	29,336	33,530	36,250	40,256	43,773	47,962	50,892	30