Статистические характеристики экспериментальных данных

Разность между измеренным значением исследуемой величины и ее истинным значением называют *погрешностью измерения*, или *погрешностью измеренной величины*.

Погрешность прямых измерений. Если целью опыта является определение какой-либо физической величины X по n ее отдельным измеренным значениям x_1, x_2, …, x_n, то результат измерений можно охарактеризовать с помощью следующих статистических параметров:

1) наиболее правдоподобное значение X, в качестве которого используют *выборочное среднее значение*;

2) дисперсию распределения отдельных значений измеряемой величины около ее выборочного среднего, т. е. *выборочную дисперсию*;

3) погрешность выборочного среднего.

В любой конечной серии измерений нельзя определить точно ни истинное среднее значение μ, ни истинную дисперсию σ^2, ни другие моменты функции распределения случайной величины. В реальном эксперименте всегда имеют дело с конечной выборкой (из генеральной совокупности) — конечным числом значений случайной величины. Поэтому возможно получить только *оценки* неизвестных параметров и их погрешности, которые в свою очередь являются случайными величинами.

Выборочное среднее значение $<x>$. На практике в подавляющем большинстве случаев для оценки истинного среднего значения μ случайной величины используют среднее арифметическое

$$< x >= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \sim \mu,$$

где n — число независимых измерений.

С увеличением числа замеров $<x>$ все более приближается к истинному среднему. Математическое ожидание выборочного среднего равно истинному среднему при условии, что каждое значение x_i принадлежит к генеральной совокупности со средним μ и дисперсией σ^2.

Дисперсия выборочного среднего значения определяется формулой

$$D(< x >) = \frac{1}{n} D(x_i),$$

откуда видно, что выборочное среднее значение является при больших n значительно более точной оценкой m, чем отдельное измерение x_i, т. к. $<x>$ имеет меньший разброс относительно истинного среднего

$$\sigma(< x >) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Это важное соотношение справедливо для любых распределений.

Выборочная дисперсия σ^2. В предыдущих выражениях предполагалось, что дисперсия распределения величины X известна. На самом же деле можно определить лишь выборочную дисперсию и на ее основе получить оценку истинной дисперсии.

Оценка s^2 истинного значения дисперсии σ^2 должна основываться на конечном наборе результатов измерений, например

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - < x >)^2.$$

Путем несложных преобразований получаем, что наилучшая оценка истинной дисперсии σ^2 имеет следующий вид

$$\sigma^2 \sim \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - < x >)^2.$$

Эта оценка дисперсии справедлива для любых распределений.

В случае только одного измерения величины X выборочное среднее значение $<x>=x$. При этом дисперсия оказывается неопределенной, поскольку неизвестен разброс экспериментальных данных. Если есть основание предполагать, что данное распределение есть распределение Пуассона, а в ядерной физике это бывает часто, то для оценки значения σ^2 используется формула

$$\sigma^2 = x\,.$$

В случае распределения Гаусса дисперсия является независимым параметром, никак не связанным со средним значением.

Погрешность выборочного среднего значения $\sigma_{<x>}$. В качестве меры того, что выборочное среднее отличается от истинного среднего меньше, чем на некоторое значение, как правило, выбирается *средняя квадратическая (или стандартная) погрешность среднего значения* $\sigma_{<x>}$.

Центральная предельная теорема статистики утверждает, что если случайная величина имеет среднее значение μ и конечную дисперсию σ^2, то при стремлении объема выборки *n* к бесконечности (практически всегда достаточно, если *n*>>30) распределение выборочного среднего значения стремиться к нормальному со средним μ и дисперсией σ^2/n. При этом распределение совсем не обязательно должно быть нормальным.

Стремление <*x*> к нормальному распределению позволяет определить среднюю квадратическую ошибку выборочного
среднего как корень квадратный из дисперсии распределения выборочных средних. Для вычисления средней квадратической погрешности заменяют неизвестное значение стандартного отклонения его выборочным значением. Тогда

$$\sigma^2(<x>) = \frac{\sigma^2(x_i)}{n} \sim \frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - <x>)^2 .$$

Таким образом, увеличение числа измерений приводит к уменьшению средней квадратической погрешности среднего значения, в то время как стандартное отклонение определяется самим физическим процессом и не зависит от числа измерений. Так, если события подчиняются распределению Пуассона и <*x*> >> 1, то при *n* → ∞ (обычно достаточно *n*~30) значение суммы в последней формуле будет практически равно $\sqrt{<x>}$.

Нормальность распределения <*x*> около μ важна для понимания смысла записи: $<x>\pm\sigma_{<x>}$. Такая запись предполагает, что с вероятностью 68% неизвестная величина *x* находится в интервале от $<x>-\sigma_{<x>}$ до $<x>+\sigma_{<x>}$.

Еще раз напомним, что вышеприведенные формулы справедливы **для больших n** (достаточно n ~ 30).

Взвешенное среднее. Если x_i независимы и получены из генеральных совокупностей с одним и тем же средним μ, но разными дисперсиями σ_i (а это бывает часто), то наиболее эффективной оценкой μ является взвешенное среднее

$$<x> = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i}, \quad где\ w_i = \frac{1}{\sigma_i^2}.$$

Погрешность взвешенного среднего определяется выражением

$$\frac{1}{\sigma_{<x>}^2} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma_i^2}.$$

Погрешность непрямых измерений. Рассмотренные выше выражения относятся к непосредственно измеряемым случайным величинам. В сколько-нибудь сложном опыте исследуемая случайная величина представляет собой сложную комбинацию из многих непосредственно измеряемых случайных величин. Такие измерения называют *непрямыми*. Средняя квадратическая ошибка величины, являющейся функцией *m* независимых случайных величин $Z(X_1, X_2,\ldots, X_m)=Z(X)$, может быть рассчитана по формуле

$$\sigma_{<Z>}^2 = \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial Z(X)}{\partial X_i}\right)^2 \sigma_i^2 .$$